Егер

$$t = \frac{\pi}{l} x \tag{3}$$

ауыстырмасын енгізсек,

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \varphi(t) \tag{4}$$

функциясы

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{5}$$

қатарына жіктеліп, коэффициенттері (4), (10), (11) § 5 формулалары бойынша есептеледі.

Егер $f(x)$ функциясы $[-l, l]$ кесіндісінде интегралданатын не жұп, не тақ функция болса, оған мына қатарлар сәйкес келеді, яғни:

$f(x)$ жұп болса

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x, \tag{6}$$

$f(x)$ тақ болса

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \tag{7}$$

ал коэффициенттер (6) үшін

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(7) үшін

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx \qquad (n = , 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

формулаларымен есептеледі.

Е с к е р т у. $[0, l]$ кесіндісінде берілген интегралданатын $f(x)$ функциясын $[0, l]$ кесіндісінен $[-l, 0]$ кесіндісіне жұп не тақ түрде созғанда шығатын және $[0, l]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясына айналатын созынды функцияға сәйкес (6) не (7) қатарды құру мүмкін болады.

№26-27 ДӘРІС. ПЕРИОДЫ 2П ФУНКЦИЯНЫҢ ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ ӘДЕТТЕГІ ЖИНАҚТАЛЫСЫ. ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ ЖИНАҚТАЛУ БЕЛГІСІ.

Дәрістің мақсаты: Бессель теңсіздігін қорытып шығару, абсолют интегралданатын функция үшін негізгі лемманы дәлелдеу, Фурье қатарының дербес қосындылары үшін Дирихле интегралын, локаольдау принципін меңгеру. Фурье қатарының жинақталу белгісін дәлелдей білу.

Периоды 2π функцияның Фурье қатарының әдеттегі жинақталысы.

1-Теорема. Егер $f(x)\in C^m[-\pi,\pi]$ және

$$f(-\pi)=f(\pi),\ f'(-\pi)=f'(\pi),\ \dots,\ f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi) \qquad (46)$$

ал $f^{(m+1)}(x)$ туындысы $[-\pi,\ \pi]$ кесіндісінде құрама-үзіліссіз болса, онда $f(x)$ функциясының Фурье еселеуіштері

$$a_k=O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\quad b_k=O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\ \left(\lim_{k\to\infty}\left(a_k:\frac{1}{k^{m+1}}\right)=0,\ \lim_{k\to\infty}\left(b_k:\frac{1}{k^{m+1}}\right)=0\right) \qquad (47)$$

және

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{\nu}\left(|a_k|+|b_k|\right),\quad \nu=0,1,\dots,m \qquad (48)$$

қатары жинақты.

Дәлелдеу. Фурье еселеуіштерін m рет бөліктеп интегралдап,

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)\cos k\xi d\xi=-\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(\xi)\sin k\xi d\xi=-\frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(\xi)\cos k\xi d\xi=\dots=$$

$$=\pm\frac{1}{k^{m+1}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m+1)}(\xi)\begin{Bmatrix}\cos k\xi\\ \sin k\xi\end{Bmatrix}d\xi, \qquad (49)$$

$$b_k=\pm\frac{1}{k^{m+1}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(m+1)}(\xi)\begin{Bmatrix}\sin k\xi\\ \cos k\xi\end{Bmatrix}d\xi$$

теңдіктерін алып, одан

$$|a_k|+|b_k|\le\frac{\left|a_k^{(m+1)}\right|}{k^{m+1}}+\frac{\left|b_k^{(m+1)}\right|}{k^{m+1}} \qquad (50)$$

екенін табамыз, мұндағы $a_k^{(m+1)}$, $b_k^{(m+1)}$ - сәйкес $f^{(m+1)}(x)$ функциясының Фурье еселеуіштері.

Ал $a_k^{(m+1)}$, $b_k^{(m+1)}$ еселеуіштері k шексіздікке ұмтылғанда нөлге ұмтылатын болғандықтан (50) теңдіктен

$$a_k=O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\quad b_k=O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right)$$

Енді (50) теңсіздікті

$$k^m\left(|a_k|+|b_k|\right)\le\frac{\left|a_k^{(m+1)}\right|}{k}+\frac{\left|b_k^{(m+1)}\right|}{k}$$

деп жазып, (45) теңсіздікті дәлелдегендей,

$$\frac{\left|a_k^{(m+1)}\right|}{k}\le\frac{1}{2}\left(\left|a_k^{(m+1)}\right|^2+\frac{1}{k^2}\right),\qquad \frac{\left|b_k^{(m+1)}\right|}{k}\le\frac{1}{2}\left(\left|b_k^{(m+1)}\right|^2+\frac{1}{k^2}\right)$$

теңсіздігін алып, оны жоғарыдағы теңсіздікке қойсақ,

$$k^m \left(|a_k| + |b_k|\right) \leq \frac{1}{2}\left(\left|a_k^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_k^{(m+1)}\right|^2 + \frac{2}{k^2}\right)$$

теңсіздікке келеміз.

Сонда

$$\frac{\left|a_0^{(m+1)}\right|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_k^{(m+1)}\right|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{(m+1)}(x))^2 dx$$

Бессель теңсіздігі мен $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ қатары жинақтылығынан $\sum_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k| + |b_k|)$ қатарының жинақтылығы, ал одан (48) қатар жинақтылығы шығады. Теорема дәлелденді.

1-Ескерту. Егер бұл теореманың шарттары m>0 үшін орындалған болса, онда $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатарын мүшелеп m рет дифференциалдауға болады, яғни

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)^{(s)}, \quad 1 \leq s \leq m, -\pi \leq x \leq \pi \qquad (51)$$

теңдігі орынды, өйткені бұларды мажорлайтын

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s(|a_k| + |b_k|), \quad 1 \leq s \leq m,$$

қатарлары жинақты.

2-Ескерту. Бұл теореманың дәлелдеуі Фурье қатарының жинақталу жылдамдығының бағасын беруге мүмкіндік береді, яғни Фурье тригонометриялық қатарының қосындысын оның дербес қосындысымен ауыстырғанда кететін қате бағалауын беруге болады. Сонымен, теорема шарттарының орындалуында (50) теңдік қосындысы үшін Коши – Буняковский теңсіздігін, $f^{(m+1)}(x)$ функциясының Фурье еселеуіштері үшін Бессель теңсіздігін және

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m+2}} \leq \int_{k_0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2m+2}}$$

айқын бағалауын пайдаланып,

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(|a_k| + |b_k|\right) \leq \sqrt{\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m+2}}}\sqrt{2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\left|a_k^{(m+1)}\right|^2 + \left|b_k^{(m+1)}\right|^2\right)} \leq$$

$$\leq \left(\int_{k_0}^{\infty}\frac{dx}{x^{2m+2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(m+1)}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(2m+1)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(m+1)}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{k_0^{m+\frac{1}{2}}} = O\left(\frac{1}{k_0^{m+\frac{1}{2}}}\right)$$

бағалауын аламыз.